

Analyse combinatoire

Analyse combinatoire	1
1. p-listes.....	2
2. Arrangements.....	3
3. Combinaisons	5
4. Triangle de Pascal.....	6
5. Formule du binôme.....	8
6. Les différents types de tirages	10
7. Exercices d'analyse combinatoire des TC.....	12
8. Exercice sur les mains de poker	15

1. p-listes

Définition

Soit E un ensemble fini et p est un entier naturel.

Alors une p -liste d'éléments de E est un p -uplet d'éléments de E .

Remarque : E^p est l'ensemble des p -uplets d'éléments de E .

Il y a une seule 0-liste : $()$.

Propriété

Si $p = 0$ alors $\text{card } E^p = 1$

Si $\begin{cases} \text{card } E = n \in \mathbb{N} \\ p \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ alors $\text{card } E^p = n^p$.

Preuve

Il y a une seule 0-liste : $()$.

Initialisation ($p = 1$):

Il y a n 1-listes d'éléments de E .

$$\text{card } E^p = n = n^p$$

Hérédité :

Supposons que si $\text{card } E = n$ alors $\text{card } E^p = n^p$ pour un $1 \leq p$ fixé.

Supposons que $\text{card } E = n$.

$$\text{card } E^{p+1} = n^p n = n^{p+1}$$

c.q.f.d.

Exercice 1 à faire avec le professeur

Soient $E = \{a, b, c\}$

$$\text{card } E = 3.$$

- 1) Listez les 0-listes d'éléments de E .
- 2) Combien y a-t-il de 0-listes d'éléments de E ?
- 3) Listez les 1-listes d'éléments de E .
- 4) Combien y a-t-il de 1-listes d'éléments de E ?
- 5) Listez les 2-listes.
- 6) Combien y a-t-il de 2-listes ?
- 7) Combien y a-t-il de 3-listes ?
- 8) Combien y a-t-il de 4-listes ?
- 9) Combien y a-t-il de 5-listes ?

Solution

- 1) $()$
- 2) 1
- 3) $(a), (b), (c)$
- 4) $3^1 = 3$
- 5) $(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)$
- 6) $3^2 = 9$
- 7) 3^3
- 8) 3^4
- 9) 3^5

2. Arrangements

Définition

Soit E un ensemble fini et p est un entier naturel.

Alors :

- un arrangement de p éléments de E est une p -liste d'éléments de E tel que les éléments de cette p -liste sont différents deux à deux distincts ;
- une permutation de E est un arrangement de $\text{card } E$ éléments de E .

Propriété

Soit E un ensemble fini et p est un entier naturel.

Soit $n = \text{card } E$.

Remarque : on note A_n^p le nombre d'arrangements de p éléments de E quand $p \leq n$.

Alors :

- $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$ quand $p \leq n$

$$\begin{aligned} \text{Remarque : } A_n^p &= \frac{n!}{(n-p)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(p-1))(n-p)(n-(p+1))\dots 1}{(n-p)(n-(p+1))\dots 1} \\ &= n(n-1)(n-2)\dots(n-(p-1)) \end{aligned}$$

- Si $p > n$ alors le nombre d'arrangements de p éléments de $E = 0$.
- Le nombre de permutation de $E = n!$

$$\begin{aligned} \text{Remarque : } n! &= n(n-1)(n-2)\dots 1 \\ 0! &= 1 \end{aligned}$$

Preuve

Initialisation ($p = 0$):

Il y a 1 arrangements d'un élément de E .

$$A_n^0 = 1 = \frac{n!}{(n-0)!}$$

Hérédité :

Supposons que $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$ pour un $p \leq n-1$ fixé.

$$A_n^{p+1} = A_n^p(n-p) = \frac{n!}{(n-p)!}(n-p) = \frac{n!}{(n-(p+1))!}$$

c.q.f.d.

Exercice 2 à faire avec le professeur

Soient $E = \{a, b, c\}$

$$\text{card } E = 3.$$

- 1) Listez les arrangements de 0 élément de E .
- 2) Combien y a-t-il d'arrangements de 0 élément de E ?
- 3) Listez les arrangements d' 1 élément de E .
- 4) Combien y a-t-il d'arrangements d' 1 élément de E ?
- 5) Listez les arrangements de 2 éléments de E .
- 6) Combien y a-t-il d'arrangements de 2 éléments de E ?
- 7) Listez les arrangements de 3 éléments de E .
- 8) Combien y a-t-il d'arrangements de 3 éléments de E ?
- 9) Listez les permutations de E .
- 10) Combien y a-t-il de permutations de E ?
- 11) Combien y a-t-il d'arrangements de 4 éléments de E ?

Solution

- 1) $()$
- 2) $A_3^0 = 1$
- 3) $(a), (b), (c)$
- 4) $A_3^1 = 3$
- 5) $(a, b), (a, c), (b, a), (b, c), (c, a), (c, b)$
- 6) $A_3^2 = 3.2 = 6$
- 7) $(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a)$
- 8) $A_3^3 = 3.2.1 = 6$
- 9) $(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a)$
- 10) 6
- 11) 0

3. Combinaisons

Définition

Soit E un ensemble fini et p est un entier naturel.

Alors : une combinaison de p éléments de E est une partie de E qui contient p éléments.

Propriété

Soit E un ensemble fini et p est un entier naturel.

Soit $n = \text{card } E$.

Remarque : on note C_n^p ou $\binom{n}{p}$ le nombre de combinaisons de p éléments de E quand $p \leq n$.

Alors :

- $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ quand $p \leq n$
- Si $p > n$ alors le nombre de combinaisons de p éléments de $E = 0$.

Preuve

Fixons p et n tels que $p \leq n$.

Pour chaque combinaison de p éléments de E , il y a $p!$ arrangements de p éléments de E .

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}$$

$$\frac{A_n^p}{p!} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

c.q.f.d.

Exercice 3 à faire avec le professeur

Soient $E = \{a, b, c\}$

$\text{card } E = 3$.

- 1) Listez les combinaisons de 0 élément de E .
- 2) Combien y a-t-il de combinaisons de 0 élément de E ?
- 3) Listez les combinaisons d' 1 élément de E .
- 4) Combien y a-t-il de combinaisons d' 1 élément de E ?
- 5) Listez les combinaisons de 2 éléments de E .
- 6) Combien y a-t-il de combinaisons de 2 éléments de E ?
- 7) Listez les combinaisons de 3 éléments de E .
- 8) Combien y a-t-il de combinaisons de 3 éléments de E ?
- 9) Combien y a-t-il de combinaisons de 4 éléments de E ?

Solution

- 1) $\{ \}$
- 2) $C_3^0 = \frac{A_3^0}{0!} = \frac{1}{1} = 1$
- 3) $\{a\}, \{b\}, \{c\}$
- 4) $C_3^1 = \frac{A_3^1}{1!} = \frac{3}{1} = 3$
- 5) $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$
- 6) $C_3^2 = \frac{A_3^2}{2!} = \frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 1} = 3$
- 7) $\{a, b, c\}$
- 8) $C_3^3 = \frac{A_3^3}{3!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 1$
- 9) 0

4. Triangle de Pascal

Propriété

Pour tout entier naturel $n \geq 0$: $C_n^0 = 1$
 $C_n^n = 1$.

Pour tout entier naturel $n \geq 1$: $C_n^1 = n$.

Pour tout entier naturel n et pour tout entier naturel p tels que $0 \leq p \leq n$: $C_n^{n-p} = C_n^p$.

Pour tout entier naturel n et pour tout entier naturel p tels que $1 \leq p \leq n-1$:
 $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$.

Preuve

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} , 0 \leq p \leq n$$

$$C_n^0 = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

$$C_n^n = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n!0!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

$$C_n^1 = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{(n)((n-1)!)}{(n-1)!} = n$$

$$C_n^{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!(n-(n-p))!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = C_n^p$$

$$\begin{aligned} C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p &= \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-1-(p-1))!} + \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!} \\ &= \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} + \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!} \\ &= \frac{(n-1)!p}{(p-1)!(n-p)!p} + \frac{(n-1)!(n-p)}{p!(n-1-p)!(n-p)} \\ &= \frac{(n-1)!p}{p!(n-p)!} + \frac{(n-1)!(n-p)}{p!(n-p)!} \\ &= \frac{(n-1)!p + (n-1)!(n-p)}{p!(n-p)!} \\ &= \frac{(n-1)!p + (n-1)!n - (n-1)!p}{p!(n-p)!} \\ &= \frac{(n-1)!n}{p!(n-p)!} \\ &= \frac{n!}{p!(n-p)!} \\ &= C_n^p \end{aligned}$$

c.q.f.d.

Exercice 4 à faire avec le professeur

Construire le triangle de Pascal avec n allant de 0 à 5 et p allant de 0 à 5.

Exercice 5 à faire seul

Construire le triangle de Pascal avec n allant de 0 à 8 et p allant de 0 à 8.

Solution de l'exercice 4

	0	1	2	3	4	5	p
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
n							

Solution de l'exercice 5

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	p
0	1									
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6	4	1					
5	1	5	10	10	5	1				
6	1	6	15	20	15	6	1			
7	1	7	21	35	35	21	7	1		
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
n										

5. Formule du binôme

Hypothèses:

$(F, +, \cdot)$ est un « corps commutatif », $a \in F, b \in F, n \in \mathbb{N}$.

Remarque : « corps commutatif » = « field » en anglais.

Thèse :

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^n C_n^i a^{n-i} b^i$$

en définissant, uniquement pour ce théorème, $0^0 = 1$.

Démonstration :

Initialisation : Si $n = 0$ alors :

$$(a + b)^n = (a + b)^0 = 1 = 1.1.1 = C_0^0 a^0 b^0 = \sum_{i=0}^0 C_0^i a^{0-i} b^i = \sum_{i=0}^n C_n^i a^{n-i} b^i .$$

Hérédité :

Soit un entier naturel n .

Supposons qu'on a : $(a + b)^n = \sum_{i=0}^n C_n^i a^{n-i} b^i$. Alors :

$$\begin{aligned} (a + b)^{n+1} &= (a + b)(a + b)^n = (a + b) \sum_{i=0}^n C_n^i a^{n-i} b^i = a \sum_{i=0}^n C_n^i a^{n-i} b^i + b \sum_{i=0}^n C_n^i a^{n-i} b^i \\ &= \sum_{i=0}^n C_n^i a^{n-i+1} b^i + \sum_{i=0}^n C_n^i a^{n-i} b^{i+1} \\ &= C_n^0 a^{n-0+1} b^0 + \sum_{i=1}^n C_n^i a^{n-i+1} b^i + \sum_{i=0}^{n-1} C_n^i a^{n-i} b^{i+1} + C_n^n a^{n-n} b^{n+1} \\ &= C_n^0 a^{n-0+1} b^0 + \sum_{i=1}^n C_n^i a^{n-i+1} b^i + \sum_{i=1}^n C_n^{(i-1)} a^{n-(i-1)} b^{(i-1)+1} + C_n^n a^{n-n} b^{n+1} \\ &= C_n^0 a^{n-0+1} b^0 + \sum_{i=1}^n \left(C_n^i a^{n-i+1} b^i + C_n^{(i-1)} a^{n-(i-1)} b^{(i-1)+1} \right) + C_n^n a^{n-n} b^{n+1} \\ &= C_n^0 a^{n-0+1} b^0 + \sum_{i=1}^n \left(C_n^i a^{n-i+1} b^i + C_n^{i-1} a^{n-i+1} b^i \right) + C_n^n a^{n-n} b^{n+1} \\ &= C_n^0 a^{n-0+1} b^0 + \sum_{i=1}^n \left((C_n^i + C_n^{i-1}) a^{n-i+1} b^i \right) + C_n^n a^{n-n} b^{n+1}. \end{aligned}$$

Or : $C_n^0 = C_{n+1}^0$; $C_n^i + C_n^{i-1} = C_{n+1}^i$ pour tout nombre naturel i tel que $1 \leq i \leq n$; $C_n^n = C_{n+1}^{n+1}$.

$$\begin{aligned} (a + b)^{n+1} &= C_{n+1}^0 a^{n-0+1} b^0 + \sum_{i=1}^n C_{n+1}^i a^{n-i+1} b^i + C_{n+1}^{n+1} a^{n-(n+1)+1} b^{n+1} \\ &= \sum_{i=0}^{n+1} C_{n+1}^i a^{n+1-i} b^i \\ &= \sum_{i=0}^{n+1} C_{n+1}^i a^{n+1-i} b^i. \end{aligned}$$

On a donc l'hérédité.

Conclusion :

Par récurrence, on a la thèse.

c.q.f.d

Exercice 6 à faire avec le professeur

Développez $\left(3x - \frac{1}{2}\right)^4$ avec la formule du binôme.

Solution

$$\begin{aligned}\left(3x - \frac{1}{2}\right)^4 &= \left(3x + \left(\frac{-1}{2}\right)\right)^4 \\&= C_4^0(3x)^4 + C_4^1(3x)^3 \left(\frac{-1}{2}\right)^1 + C_4^2(3x)^2 \left(\frac{-1}{2}\right)^2 + C_4^3(3x)^1 \left(\frac{-1}{2}\right)^3 + C_4^4 \left(\frac{-1}{2}\right)^4 \\&= 1(81)x^4 + 4(27)x^3 \frac{-1}{2} + 6(9)x^2 \frac{1}{4} + 4(3)x \frac{-1}{8} + 1 \frac{1}{16} \\&= 81x^4 - 54x^3 + \frac{27}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{16}\end{aligned}$$

Exercice 7 à faire seul

Développez les produits suivants avec la formule du binôme.

a) $(-3 + 2x)^5$

b) $(2 - 3i)^4$

Solution

a) $-243 + 810x - 1080x^2 + 720x^3 - 240x^4 + 32x^5$

b) $-119 + 120i$

6. Les différents types de tirages

Remarque : cet exercice est inspiré du TP2 page 318 du livre « MATH Term S Obligatoire, Programme 1994, Nouveau Transmath – NATHAN ».

Remarque : cet exercice est à faire avec le professeur.

Une urne contient 5 boules nommée A, B, C, D, et E.

Exercice 8 à faire avec le professeur

Tirage avec remise

Soit l'expérience aléatoire définie par le protocole suivant :

- On effectue 3 tirages successifs **avec** remise.
- On note le nom de chaque boule suivant l'ordre dans lequel elle a été tirée.
Cette 3-liste est le résultat de l'expérience.

1) Combien y a-t-il de résultats possibles ?

2) Combien y a-t-il de résultats possibles dans chacun des cas suivants :

- a. La première boule tirée est la boule C, la deuxième est la boule D, et la troisième est la boule A ?
- b. La première boule tirée est la boule C, la deuxième est la boule D ?
- c. La deuxième boule tirée est la boule A, la troisième est la boule B ?
- d. La troisième boule tirée est la boule A ?

Tirage sans remise

Soit l'expérience aléatoire définie par le protocole suivant :

- On effectue 3 tirages successifs **sans** remise.
- On note le nom de chaque boule suivant l'ordre dans lequel elle a été tirée.
Cet arrangement de 3 éléments est le résultat de l'expérience.

1) Combien y a-t-il de résultats possibles ?

2) Même question que la question 2 précédente.

Tirage simultané

Soit l'expérience aléatoire définie par le protocole suivant :

- On effectue 3 tirages de façon simultanée.
- On note les trois noms des trois boules tirées.
Cet ensemble de 3 éléments est le résultat de l'expérience.

3) Combien y a-t-il de résultats possibles ?

4) Combien y a-t-il de résultats possibles dans chacun des cas suivants :

- a. L'ensemble des boules tirées contient la boule C ?
- b. L'ensemble des boules tirées contient la boule A et la boule C ?

Solution

Tirage avec remise.

1) 5^3

2)

- a. 1
- b. 5
- c. 5
- d. 5^2

Tirage sans remise.

1) A_5^3

2)

- a. 1
- b. A_3^1
- c. A_3^1
- d. A_4^2

Tirage simultané.

1) C_5^3

2)

- a. C_4^2
- b. C_3^1

7. Exercices d'analyse combinatoire des TC

Instruction : faire les deux premiers exercices avec le professeur et faire les autres exercices seul.

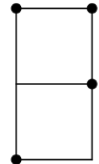
Exercice n°9 (2014)

Partie A.

Louis Braille (1809 – 1852) a créé, avec l'un de ses amis Foucault, un système d'écriture destiné aux aveugles.

L'alphabet comporte des signes représentant les lettres, les signes de ponctuation, les chiffres et les signes mathématiques. Ces signes sont formés par des points en relief, au maximum 6, disposés sur deux lignes verticales et trois horizontales.

Par exemple, le signe ci-contre représente la lettre N.



1. Combien y a-t-il de signes différents ?
2. Combien y en a-t-il comportant 5 points en relief ?
3. Combien y en a-t-il comportant au moins 4 points en relief ?

Partie B.

On dispose des 8 lettres du mot JACINTHE (sans répétition) pour former les mots.

1. Combien de mots de six lettres peut-on ainsi former ?
2. Combien de mots de six lettres dont la deuxième et la dernière sont des voyelles et les quatre autres des consonnes peut-on ainsi former ?
3. Combien de mots de six lettres comportant deux voyelles et quatre consonnes peut-on ainsi former ?

Exercice n°10 (2013)

On choisit simultanément et au hasard 5 cartes dans un jeu de 32 cartes.

- 1) Quel est le nombre total des choix possibles ?
- 2) Combien y a-t-il de résultats comprenant :
 - a) exactement 2 valets ?
 - b) aucun as ?
 - c) au moins 3 dames ?
 - d) 2 trèfles et 3 carreaux ?
 - e) 2 cartes d'une couleur et trois de l'autre ?
 - f) au moins un roi ?

Exercices supplémentaires

- 3) Combien y a-t-il de résultats comprenant :
 - a) une paire de roi et une paire d'as ?
 - b) deux paires ?

Note: Un jeu de 32 cartes contient 4 couleurs (8 carreaux, 8 trèfles, 8 piques et 8 cœurs).

Chaque couleur contient 8 cartes de différentes valeurs : 7, 8, 9, 10, valet, dame, roi, as.

Exercice n°11 (2012)

Un sac contient 9 jetons numérotés de 1 à 9.

- 1) On tire successivement avec remise 3 jetons du sac. On forme ainsi un nombre de trois chiffres: le 1^{er} jeton tiré donne le chiffre des centaines, le 2^{ème} le chiffre des dizaines et le 3^{ème} celui des unités.

Combien peut-on former de nombres tels que:

- a) le chiffre des unités soit 9;
 - b) le chiffre 9 figure exactement une fois dans le nombre obtenu;
 - c) le chiffre 9 figure au moins une fois dans le nombre obtenu.
- 2) On tire successivement sans remise 3 jetons du sac.

Combien peut-on former de nombres tels que:

- a) le chiffre des unités soit 9;
- b) le chiffre 9 figure exactement une fois dans le nombre obtenu;
- c) le chiffre 9 figure au moins une fois dans le nombre obtenu.

Exercice n°12 (2011)

On dispose d'un clavier ayant huit touches: trois lettres : *I, J* et *K* et cinq chiffres : 1, 2 ; 3 ; 4 et 5.

Un code est composé d'une lettre suivi de trois chiffres qui ne sont pas nécessairement distincts.

Avec ce clavier, combien de codes différents peut-on former s'ils :

1. commencent par *I* ?
2. commencent par *I* et les chiffres sont deux et deux distincts?
3. commencent par *J2*?
4. terminent par *12*?
5. contient seulement des chiffres pairs ou des chiffres impairs?

Exercice n°13 (2009)

A l'entrée d'un bâtiment, on dispose d'un clavier de 12 touches : trois lettres A,B,C et les neuf chiffres non nuls. Le code de l'ouverture de la porte est composé d'une lettre suivie d'un nombre de quatre chiffres pouvant être répétés. Par exemple A 4564 .

1. Combien existe-t-il de codes différents ?
2. Combien y a-t-il de codes
 - a. comportant au moins une fois le chiffre 7 ?
 - b. pour lesquels tous les chiffres sont pairs ?
 - c. pour lesquels les quatre chiffres sont différents ?
 - d. pour lesquels les quatre chiffres forment une suite strictement croissante ?

Exercice n°14 (2008)

Un clavier de 9 touches permet de composer le code d'entrée d'un immeuble, à l'aide d'une lettre suivie d'un nombre de 3 chiffres.

1. Combien de codes différents peut-on former ?
2. Combien y a-t-il de codes sans le chiffre 1 ?
3. Combien y a-t-il de codes comportant au moins une fois le chiffre 1 ?
4. Combien y a-t-il de codes comportant des chiffres distincts ?
5. Combien y a-t-il de codes comportant au moins deux chiffres identiques ?

1	2	3
4	5	6
A	B	C

Exercice n°15 (2007)

Soit les chiffres 0, 1, 2, 4, 5, 6, 8 et les lettres A, B, C, D, E, F, G, H, I, J..

1. Combien de nombres à 4 chiffres peut-on former à partir de ces chiffres.
2. Parmi ces nombres, combien y a-t-il de nombres:
 - a) impairs
 - b) supérieurs à 4000
 - c) dont les chiffres sont tous distincts
 - d) divisibles par 5
3. Le code est composé de 4 chiffres suivis par deux lettres. Les lettres sont distinctes.
 - a) Dénombrer le nombre de codes possibles .
 - b) Combien y a-t-il de codes commençant par 0 et finissant par H?
 - c) On sait que le code contient les chiffres 1, 2, 4 et 5. Dénombrer le nombre de ces codes.
 - d) Combien y a-t-il de codes contenant une fois, et une seule, le chiffre 8?

Solution des exercices 9 à 15

Exercice 9 : Partie A : 1) 2^6 ou $2^6 - 1$ 2) C_6^5 3) $C_6^4 + C_6^5 + C_6^6$ Partie B (sans répétition): 1) A_8^6 2) $A_5^4 A_3^2$ 3) $A_5^4 A_3^2 C_6^2$ Partie B (avec répétition) 1) 8^6 2) $5^4 3^2$ 3) $5^4 3^2 C_6^2$

Exercice 10 : 1) C_{32}^5 2) a) $C_4^2 C_{28}^3$ b) C_{28}^5 c) $C_4^3 C_{28}^2 + C_4^4 C_{28}^1$ d) $C_8^2 C_8^3$ e) $C_4^1 C_8^2 C_3^1 C_8^3$
f) $C_4^1 C_{28}^4 + C_4^2 C_{28}^3 + C_4^3 C_{28}^2 + C_4^4 C_{28}^1 = C_{32}^5 - C_{28}^5$ 3) a) $C_4^2 C_4^2 C_{24}^1$ b) $C_8^2 C_4^2 C_4^2 C_{24}^1 = \frac{C_8^1 C_4^2 C_7^1 C_4^2 C_{24}^1}{2}$

Exercice 11: 1) a) 9^2 b) $C_3^1 8^2$ c) $9^3 - 8^3 = C_3^1 8^2 + C_3^2 8 + 1$ 2) a) A_8^2 b) $C_3^1 A_8^2$ c) $C_3^1 A_8^2$

Exercice 12 : 1) 5^3 2) A_5^3 3) 5^2 4) 3×5 5) $3 \times 2^3 + 3 \times 3^3$

Exercice 13 : 1) $3 \cdot 9^4$ 2) a) $3 \cdot 8^3 \cdot 1 \cdot C_4^1 + 3 \cdot 8^2 \cdot 1^2 \cdot C_4^2 + 3 \cdot 8 \cdot 1^3 \cdot C_4^3 + 3 \cdot 1^4 \cdot C_4^4 = 3 \cdot 9^4 - 3 \cdot 8^4$ b) $3 \cdot 4^4$
c) $3 \cdot A_9^4$ d) 3×6 (si l'écart entre deux chiffres qui se suivent est égal à 1) d) $3 \times C_9^4$ (si l'écart entre deux chiffres qui se suivent est plus grand ou égal à 1)

Exercice 14 : 1) $3 \cdot 6^3$ 2) $3 \cdot 5^3$ 3) $3 \cdot 6^3 - 3 \cdot 5^3$ 4) $3A_6^3$ 5) $3 \cdot 6^3 - 3A_6^3 = 3 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 1 \cdot C_3^1 + 3 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 1$

Exercice 15 : 1) $6 \cdot 7^3$ 2) a) $6 \cdot 7^2 \cdot 2$ b) $4 \cdot 7^3 - 1$ c) $6A_6^3$ d) $6 \cdot 7^2 \cdot 2$ 3) a) $7^4 A_{10}^2$ b) $1 \cdot 7^3 \cdot 9 \cdot 1$ c) $A_4^4 A_{10}^2$
d) $6^3 C_4^1 A_{10}^2$

8. Exercice sur les mains de poker

Exercice n°16

On choisit simultanément et au hasard 5 cartes (ce qui constitue une main de poker) dans un jeu de 52 cartes.

Note: Un jeu de 52 cartes contient 4 couleurs (13 carreaux, 13 trèfles, 13 piques et 13 cœurs). Chaque couleur contient 13 cartes de différentes valeurs : 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, valet, dame, roi, as.

Les différentes « mains » possibles sont :



- 1) Prouver que le nombre de quintes royales est égal à 4.
- 2) Prouver que le nombre de quintes flush est égal à 36.
- 3) Prouver que le nombre de carrés est égal à 624.
- 4) Prouver que le nombre de fulls est égal à 3744.
- 5) Prouver que le nombre de couleurs est égal à 5108.
- 6) Prouver que le nombre de suites est égal à 10200.
- 7) Prouver que le nombre de brelans est égal à 54912.
- 8) Prouver que le nombre de doubles paires est égal à 123 552.
- 9) Prouver que le nombre de paires est égal à 1 098 240.
- 10) Prouver que le nombre de salades (cartes fortes) est égal à 1 302 540.
- 11) Prouver que le nombre de mains est égal à 2 598 960.